KonteXt 8-9

**Kursus i Trigonometri**

Lærervejledning

Bent Lindhardt og Niels Jacob Hansen

Forlaget Alinea

**Indledende kommentarer**

Hæftet *Kursus i Trigonometri* er blevet til grundet de ændrede indholdsmæssige krav, som kom i Fælles mål 2009. Det skal således ses som et supplement til KonteXt 8 og 9 samt som muligt supplement til andre lærebogssystemer. Det forudsættes således ikke, at man bruger KonteXt. Hæftet kan anvendes til det bogsystem, man måtte have i klassen.

I Fælles mål 2009 står følgende

* *arbejde undersøgende med enkel trigonometri i forbindelse med retvinklede trekanter og beregne sider og vinkler.*

Som det kan ses betones det, at der er tale om ”enkel trigonometri”, og at det drejer sig om ”retvinklede trekanter”. Gennem valg af indhold har det været vores ledetråd netop at udvælge det enkle og centrale, så stoffet ikke tog overhånd. Det er som regel ikke vanskeligt at få ideer til, hvad man *også* kunne skrive om men langt vanskeligere at *udelade* noget - man kunne jo få brug for det. Vi har således udeladt trigonometri knyttet til koordinatsystemet inden for analytisk geometri, enhedscirklen og trigonometriske sætninger som sinusrelationer og cosinusrelationer. Det har vi forbeholdt ungdomsuddannelserne at tage sig af. Der centrale for os er en varieret og grundig erkendelse hos eleverne af, hvordan sider og vinkler forholder sig til hinanden i en retvinklet trekant - og de mulige beregninger, det kan føre med sig. Det betyder, at vi begrænser os til en definitionsmængde på 0 - 90 grader - det der kan forekomme i en retvinklet trekant.

Ud fra samtaler med lærere og egne erfaringer har vi oplevet et udtalt behov for at skabe en kontekst, som eleverne kan bruge i deres billeddannelse af forhold mellem sider og vinkler i en retvinklet trekant, og som gør trigonometrien mere konkret og nemmere at tale om. Det er blevet til STIGE-MATEMATIK. Vi introducerer en situation, hvor en stige læner sig op af en lodret mur og har fodfæste på et vandret gulv. Hvor stigen repræsenterer hypotenusen, repræsenterer væg samt gulv kateterne i en retvinklet trekant. Gennem hæftet refereres der hele tiden til dette billede, når nye regelmæssigheder og forhold dukker op.

Hæftet er opdelt i to afsnit.

* En kursusdel, som er opbygget progressivt og leder eleven gennem stoffet via øvelser og forklaringer.
* En opgavedel med blandede opgaver, som præsenterer en række træningsopgaver samt en række kontekster, hvor vi ”blander” de trigonometriske beregninger. De kan bruges som afsluttende opgaver til at konsolidere den viden, man har fået i kurset eller bruges som repetition ved senere lejligheder evt. som hjemmeopgaver.

Bemærk, at der på side 31 er et skema, som eleverne kan hente hjælp i, når de skal beregne den ubekendte vinkel eller side i den retvinklede trekant.

Bemærk i den sammenhæng, at forlaget har fremstillet en plakat med trigonometri, hvor dette skema indgår.

Vi tænker, at hæftet primært henvender sig til 8. eller 9. klasse, idet der er brug for kendskab til ligedannethed, til den Pythagoras’ sætning samt de beregninger som det fører med sig i den sammenhæng.

God fornøjelse med hæftet

Niels Jacob Hansen og Bent Lindhardt

**Kommentarer til opgaverne**

I det følgende vil vi kommentere opgaverne i hæftet. Facitliste kan downloades fra [www.alinea](http://www.alinea).dk – samme sted hvor hæftet beskrives.

**Hæftet side 4-5**

Disse sider skal introducere scenariet om stigen, væggen og gulvet. Eleven skal i opgaverne have et billede af, hvordan vinkler og sider forholder sig til hinanden, når man placerer stigen forskellige steder.

Det kan være en god ide at udføre nogle praktiske handlinger med en ”mini” stige i klassen og gennemføre en klassesamtale, så situation fremstår klart for eleverne. Det skal indses, at disse tre ”ting” til sammen kan udgøre en model for en retvinklet trekant.

Placering af stigen i yderpunkter er central. Tal om vinkler, når stigen er næsten parallel med væggen og næsten er parallel med gulvet.

Gennem hæftet anvender vi konsekvens de samme farver for de tre sider i den retvinklede trekant. Kateterne har hver en farve: rød for væg og blå for gulv. Hypotenusen er sort.

**Opgave 1-2**

Vi har valgt at benævne den rette vinkel C, idet det traditionelt er sådan man ser det i de fleste matematikbøger. Det skal dog bemærkes, at det ikke er en tradition i alle lande - og ikke er et formelt matematisk krav. Kan nogle af eleverne overskue det, kan de jo forsøge at løsrive sig og undersøge andre muligheder for navngivelse.

**Opgave 3-4**

Igen undersøges situationen stige - væg og gulv.

**Hæftet side 6-7**

 Siderne skal opfattes som en repetition af navnestoffet til den retvinklede trekant - fra forrige side. Det er centralt, at forstå hvad en modstående side og en hosliggende side til en vinkel er.

Den modstående side volder ikke umiddelbart noget problem, men den hosliggende side kan give vanskeligheder, idet der er to muligheder. I denne sammenhæng svarer den hosliggende side til den hosliggende katete - dette præciseres senere. Man kan evt. sammen med eleverne tale om modstående sider og hosliggende sider i en firkant og femkant - hvor det synligt bliver kompliceret idet det specielt for ” den modstående side” bliver for upræcist et begreb.

**Opgave 5-8**

I opgave 5 b er der to løsninger til hver af de retvinklede trekanter alt efter, hvor man placerer vinkel A og B.

**Opgave 9-10**

Vi ser Pythagoras sætning som en væsentlig del af de trigonometriske beregninger, men gør ikke mere ud af det end den korte repetition på side 7.

**Hæftet side 8-9**

På disse sider prøver vi at skabe indsigt i forholdet mellem vinkler og sider i en retvinklet trekant. Eleverne skal indse at til en bestemt vinkel A, er forholdet mellem modstående katete og hypotenusen den samme uanset størrelsen af den retvinklede trekant. Det skal således være klart, at sinus er et forholdstal - et brøktal. Brug gerne afsluttende kommentarer i klassen, hvor dette fremhæves. Det skal bemærkes, at mange misopfatter sinus som en vinkelstørrelse, hvilket er forkert.

Til orientering er ordet sinus et latinsk ord for krumning, bugt eller foldning. Der findes flere historier om, hvordan ovenstående forhold er kommet til at hedde sinus.

En indisk matematiker fra ca. 500 e. Kr. skulle være den, som indførte begrebet. Han definerede den som forholdet mellem korden og radius i en cirkel. Det blev senere til en halv korde. Tegn selv og få øje på den retvinklede trekant.

Araberne tog den ”kordegeometri” til sig og kaldte den *jiba* - men da det arabiske skriftsprog kun består af konsonanter, blev det skrevne til *jb*. Her opstår forviklingen, idet *jb* også kan være *jaib,* som betyder bugt, fold. Misforståelsen skulle være sket af enten en engelsk eller italiensk matematikker fra 1100-tallet, som oversatte ordet ”halv korde” til det forkerte ”bugt, fold”.

Vi bruger konsekvens betegnelsen sin A, som skrivemåde for sinus til vinkel A - vel vidende at det mere præcist burde skrives som sin v - hvor v er vinkels A’s størrelse. Som vi skrev i indledningen, har vi forsøgt at forenkle stoffet og brugen af ”to bogstaver” knyttet til en vinkel, forvirrer mere end det gavner denne indledende forståelse.

**Opgave 11**

Opgaven tager tid men brug den… Eleverne skal fremstille to sæt retvinklede trekanter for at have et fornuftigt sammenligningsmateriale. For at eleverne får et fagligt udbytte af opgaven, bør man opfordre dem til at være nøjagtige med konstruktionen.

Opgaven kan også løses i et geometriprogram, hvor eleverne så kan sammenligne data fra de to undersøgelser.

Som ekstra udfordring kan man evt. give nogle af eleverne flere ark millimeterpapir og lade dem forsøge sig med større værdier for vinkel A. De vil så se, hvordan hypotenusens længde stiger voldsomt. I eksemplet med A1 vil sin 70° få en modstående katete på ca.14 cm mens

sin 80° er oppe på ca. 28 cm.

Bed eleverne om at være omhyggelige med at aflæse de anviste længder på millimeterpapiret. Lad dem evt. bruge forskellige farver til henholdsvis trekanterne i A1 og A2.

**Opgave 12**

Det skulle fremgå med rimelig nøjagtighed, at der til samme vinkel er lige store forholdstal.

Man kan evt. sammenligne elevernes resultater imellem eller opsummere resultaterne i et regneark for derefter at tage gennemsnitsværdien, så der fremstår et samlet klasseresultat.

**Hæftet side 10-11**

Ikke alle bemærker, at ***co***sinus er en videreskrivning af sinus - med god grund. Eleverne skal her opleve sammenhængen og modstykket til sinus. De gentager således øvelsen fra siderne før men i en ny udformning. Denne gang har vi fortegnet kateterne og hypotenusen, så de blot skal aflæse og beregne. Appeller igen til nøjagtighed og måske sammenligning af elevernes forskellige målinger.

På side 11 skal eleverne udnytte de trigonometriske funktioner på lommeregneren - for at sammenligne med deres manuelle arbejde på de tidligere sider. Vi har undladt at gå ind i de forskellige måder at angive vinkler som nygrader (GRAD), ”almindelige” grader (DEG) og radianer (RAD).

**DEG** – er de almindelige brugte grader, hvor cirklen er inddelt i 360 lige store stykker.

**GRAD**- omtales som nygrader, hvor man har inddelt cirklen i 400 lige store stykker. Det er ikke særligt ofte denne enhed bruges.

**RAD** – er en forkortelse af radianer. Hvis man tegner en cirkel med radius 1 (enhedscirklen), så vil omkredsen være 2 · π · radius, altså 2 · π · 1 = 2π. Det vil sige at i stedet for at beskrive hele vejen rundt på en cirkel som 360°, kan man sige den svarer til 2π på enhedscirklen. 180° vil svare til π osv. Dette måltal kaldes for radianer.

En mulig formel til omsætning mellem radianer og grader er: Radianer = $\frac{grader }{360}∙2π $

Det skal bemærkes, at regnearket regner i radianer. Hvis man bruger regneark til trigonometriske beregninger, skal eleverne omregne deres gradtallet til radianer. Det kan ske ved brug af nedenstående formel og skema.



Man vil således kunne gå ud over den definitionsmængde, vi har valgt at operere i - fra 0 til 90 grader - og dermed kortlægge den trigonometriske funktion.

**Opgave 13**

Vi har fravalgt millimeternet for at lade eleverne selv måle. Bemærk, at vi undlader navne på sider og vinkler. Det kan være, at nogle elever skal begynde med at fastslå, hvad der er siderne b og c. De kan evt. kontrollere, om vinklerne passer. Afrund tallene til 2 decimaler.

Eleverne vil kunne konstatere, at modsat sinus falder værdien voldsomt mod de 90 grader (for at ende med at blive 0).

**Opgave 14-15**

Der kan være forskel på lommeregnere - dette bør nok bearbejdes i klassen inden opgaven løses, så alle elever er klar over, hvad der korresponderer med hvad. Som ekstra udfordring kan man lade eleverne bytte lommeregner og prøve hinandens.

Eleverne bør her registrere, at tallene er næsten identiske men i hver sin rækkefølge. Vi bemærker, at cos v = sin (90 - v) eller cos (90 - v) = sin v.

**Hæftet side 12-13**

Her skal eleverne anvende deres nyskabte viden til at løse forskellige opgaver. Det betyder, at de skal have styr på, hvordan man regner sig frem til en vinkel, hvis man kender forholdstallet. Vi taler altså om den omvendte funktion sin-1 - som kan have forskellige tastsymboler på forskellige lommeregnere. Vi har tilladt os at omtale dette som ”at regne omvendt”.

**Opgave 16-17**

Da eleverne kun opererer i området 0 - 90 grader, er der entydige svar på, hvor mange grader der skal svares til det første skema.

I det andet skema skal eleverne forstå den voldsomt voksende funktion sinus og voldsomt faldende funktion cosinus efterhånden, som vinklen nærmer sig de 90 grader. Sammenholder man det med stigebilledet, nærmer vi os mere og mere situationen, hvor stigen bliver længere og længere for til sidst at blive parallel med væggen - og dermed ophører med at være en trekant. Vi har altså tale om en grænseværdi, som nærmer sig 1 for sinus-værdien og 0 for cosinus-værdien.

Udvider vi definitionen ved brug af en enhedscirkel frem for den retvinklede trekant, fremstår værdien sin 90 = 1 som en naturlig følge.

**Opgave 18-20**

Bemærk, at der har indsneget sig en fejl i 1. udgave. I linjen for udregningen af dragehøjden står der til sidst, at 30 = a. Den rigtige udregning er vist herunder.

100 • 0,5 = a 30 = a det skal ændres til 100 • 0,5 = a 50 = a

**Hæftet side 14-16**

Trigonometri har mange anvendelser. Kendskab til geometrien vedrørende ligedannethed og ensvinklede trekanter kan bruges til at finde højden på genstande, som det vil være vanskeligt at måle direkte. For yderligere inspiration med hensyn til mål og aktiviteter henvises til Fælles Mål - Matematik side 80 ff.

Opgaverne her i hæftet er tænkt som inspiration til at måle højder uden for klasselokalet.

**Opgave 21- 22**

Erfaringsmæssigt er skyggemåling en ret præcis metode til at bestemme højder på.

**Opgave 23-24**

De fleste elever er udstyret med et digitalkamera(i mobiltelefonen), og ved at tage et billede af en høj genstand og derefter måle på billedet og sammenholde med et kendt mål på billedet er det muligt at bestemme højden af fx et træ.

Det er ikke nødvendigt at bruge et geometriprogram.

Som det også er skrevet i hæftet, skal vinklen kamera - høj genstand - målepunkt være vinkelret. Det er ikke afgørende, at størrelsen af vinklen er præcis 90°.

I opgave 24 er der en trin for trin-vejledning, som angiver, hvordan man skal gøre dette. Vær opmærksom på, at der er forskel på, hvordan et billede lægges ind i de forskellige geometriprogrammer.

**Opgave 25**

Sigtevinklen til træet kan måles med et klinometer, som man enten kan lade eleverne fremstille selv eller købe.

I sin mest primitive form er det blot en vinkelmåler med en lodlinje.

Som ved opgave 22 og 24 vil det også her være oplagt, at eleverne selv indsamler nogle observationer, som de kan bruge til deres beregninger.

**Hæftet side 17-19**

På disse sider starter vi med at introducere tangens, som forholdet mellem den modstående og hosliggende katete. Også her har vi altså valgt at se bort fra enhedscirklen eller at definere tangens som forholdet mellem sinus og cosinus til en vinkel.

Oprindelsen til ordet tangens kan kun forklares ved at betragte enhedscirklen.



Som vi også skriver i hæftet er der flere måder at forkorte tangens på, hvilket man skal være opmærksom på, når eleverne bruger deres lommeregner.

I de danske versioner af regneark er navnet på tangensfunktionen TAN. Som ved sinus og cosinus skal vinkelstørrelsen være radianmål.

**Opgave 26**

Ideen med opgaven er, at eleverne skal bevidstgøres om, at tangens er forholdet mellem længden af den modstående katete og længden af den hosliggende katete.

**Opgave 27**

Opgaven er analog med opgave 26, men her skal eleverne bruge et dynamisk geometriprogram.

**Opgave 28**

Opgavens formål er, at eleverne lærer deres egen lommeregner at kende.

Formlen for beregning af tangens i en retvinklet trekant kan omskrives på i hvert fald to måder. En ekstra udfordring er at finde den anden måde at omskrive formlen på. Det kan være nyttigt i forhold til beregninger i den retvinklede trekant.

**Opgave 29-31**

Eleverne skal beregne højden af forskellige genstande, når de kender en vinkel og den hosliggende katete i en retvinklet trekant.

Opgave 31 er tænkt som en forlængelse af opgave 30, hvilket ikke umiddelbart fremgår af opgaveteksten, derfor skal man være opmærksom på, at der kan være 1 m i forskel på svarene.

En særlig udfordring i opgave 31 er at beregne højden, når sigtevinklen er 90°. Højden kan ikke beregnes, da tangens 90° ikke er defineret. Det vil være en styrkelse af elevernes matematiske tankegangskompetence at lade dem overveje, hvad der sker med højden, når vinklen nærmer sig 90°!

**Side 19**

Når man kender størrelsen af de to kateter i en retvinklet trekant, kan man ved den inverse funktion til tangens beregne størrelse af vinklerne, når man kender længden af de to kateter.

Som ved de omvendte funktioner til sinus og cosinus er indtastningen afhængig af den type lommeregner, som man bruger.

Hvis man bruger regneark er den omvendte funktion ARCTAN, hvor den værdi der beregnes er et radianmål.

**Opgave 32**

I delopgave a drejer det sig om, at eleverne undersøger deres lommeregner.

I delopgave b beregner eleverne størrelsen af vinkel A ud fra de to kateter.

En udfordring kunne ligge i, at lade eleverne bytte om på værdierne for modstående og hosliggende katete, og så lade dem forklare, hvilken vinkel de nu beregner.

En anden udfordring kunne ligge i, om eleverne udelukkende ved hjælp af kendskab til tangens og pythagoras kan beregne manglende sidelængder og vinkler i en retvinklet trekant.

**Side 20-30**

Disse sider indeholder forskellige typer af opgaver med forskellig sværhedsgrad, hvor eleverne arbejder med forskellige former for trigonometriske beregninger.

**Opgave 33**

Denne opgave skal ses i sammenhæng med beregningsskemaet på side 31.

Opgave 33.1 kan derfor løses ved at bruge række 1 i beregningsskemaet.

De øvrige opgaver følger skemaet på samme måde.

**Opgave 34**

Eleverne udvikler deres problemløsningskompetence ved at opstille problemer, som de andre elever skal forsøge at løse.

Der er ikke megen plads i feltet nederst på siden, så derfor vil opgaven vinde ved, at eleven udformer en opgave på et større ark.

**Opgave 35**

De to første dele af opgaven er rene beregninger, mens den tredje del af opgaven lægger op til, at eleverne skal reflektere over deres resultat.

Hvis de har regnet rigtigt, vil de opdage, at sinus A = stigningen i procent. De har kun et enkelt resultat at gå ud fra, så derfor bør man opfordre dem til at undersøge, om det kun gælder for denne værdi eller om det er et generelt resultat, de er kommet frem.

Eleverne skal ikke arbejde med et bevis, men de kan fx lave en undersøgelse, hvor de ved hjælp af en tabel underøger, hvordan sammenhængen er mellem stigning i procent og værdien af sinus A.

Eksemplet herunder er lavet i regneark, men da regnearket bruger radianmål vil vi anbefale, at udføre beregningerne på en lommeregner.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Stigning i procent | 10 % | 15 % | 37 % | 45 % | 50 % |
| Højde | 13 | 19,5 | 48,1 | 58,5 | 65 |
| Vinkel A | 5,73917 | 8,626927 | 21,71562 | 26,74368 | 30 |
| Sinus A | 0,1 | 0,15 | 0,37 | 0,45 | 0,5 |

**Opgave 36**

Denne opgave kunne med fordel udføres i et geometriprogram.



Stigningen kan beregnes ved sin 10°.

**Opgave 37**

Tværsnittet af opkørslen er en original illustration, hvor vi ikke har ændret på, at der mellem de to sidste højdemarkeringer kun er en vejafstand på 200 m - på illustrationen ser det ud som, at der er 500 m.

For at give eleverne en fornemmelse af stigningens størrelse kan de finde ”stejle” områder i nærheden af skolen og ved hjælp af et vaterpas og en meterlineal måle sig frem til stigninger.

**Opgave 38-41**

Her vender vi tilbage til det indledende tema med stiger, men tager fat i et omverdens problem. Reglen, der er nævnt, er ikke taget ud af den blå luft, men er en god tommelfingerregel, som med fordel kan anvendes for stiger, der står på et fast underlag.

Opgave 38 + 39 er beregningsopgaver.

I opgave 40 skal eleverne bruge modellen eller reglen for stigen.

I sidste spørgsmål i opgave 45 skal eleverne kunne give et ræsonnement for sammenhængen mellem to regler.

**Opgave 42-43**

Begrebet glidetal kendes fra flyvning. Opgaven med flyet ved Heathrow lufthavn er autentisk på den måde, at det er en model for flyets flugt under landingen. Derimod er det nok mere tvivlsomt om en fugl skulle finde på at have præcis den flugt, der er vist på tegningen.

I opgave 42 er udfordringen, at eleverne skal kunne afkode definitionen for glidetal, der er skrevet i almindeligt sprog og omsætte den til et regneudtryk, der skal bruges til at beregne de manglende værdier i tabellen.

**Opgave 44**

Opgaven er ren matematik, som skal gøre eleverne opmærksomme på, at alle trigonometriopgaver kan løses ved tegning og måling, men at det giver unøjagtigheder, som man bør diskutere.

**Opgave 45**

Opgaven refererer til det praktiske problem, at man har en stige med en given længde, som man skal bruge for at nå op til fx et vindue. Kan stigen bruges, når man skal tage hensyn til reglen om stigens afstand til væggen.

**Opgave 46**

Højden af huset er ca. 7,5 m - resultatet kan man hurtigt komme frem til ved at betragte gavlen som en ligebenet retvinklet trekant med en hypotenuse på 10 m.

For at finde den præcise højde, er det nødvendigt at tage hensyn til tykkelsen af spærene, hvilket er en ekstra udfordring.

Ordet skitse, betyder at man skal udføre en tegning, der kan være en støtte for de beregninger der skal udføres. En skitse er ikke målfast.

**Opgave 47**

Opgaven er ren beregning, men man kan differentiere ved at tage forbehold for nøjagtigheden ved vinkelmåling og længdemåling.

Hvis nu den målte vinkel blot ligger i intervallet fra 57° til 59° og længden hen til Eiffeltårnets lodrette akse ligger mellem 99 m og 101 m. Hvilket interval vil højden så skulle angives til at ligge i? - Denne opgavetype kan man bruge for at udfordre de stærke elever.

Disse overvejelser kan man føre over til praktiske målinger af fx skolens flagstang. Hvor nøjagtigt kan man måle sigtevinklen, og hvor nøjagtigt kan man måle afstanden til flagstangen?

**Opgave 48**

Denne opgave kan danne udgangspunkt for udfordringer, hvor eleverne i marken skal bestemme afstande til genstande, hvor det af forskellige grunde vil være umuligt at måle den direkte afstand. Opgaven kunne bruges som et oplæg til et mindre forløb, hvor eleverne arbejder i felten med geometrien.

**Opgave 49**

Her er et eksempel på, hvor trigonometriske beregninger er en nødvendighed. I dette tilfælde vil det være umuligt at tegne med en tilstrækkelig nøjagtighed, og skulle man alligevel prøve, vil tegningen selv i et meget lille målestoksforhold blive for stor til, at det kunne lade sig gøre.

Hvis man interesserer sig for astronomi, vil man vide, at et af problemerne omkring afstandsbestemmelse til stjernerne er at kunne måle vinklen, eller som det hedder parallaksen præcist.

Den afstand der er til stjernen i opgaven svarer til den afstand, der er til Solens nærmeste nabo.

**Opgave 50**

Opgaven er ikke umiddelbart til at løse med de redskaber, der er blevet præsenteret i hæftet, så den skal betragtes som en udfordring, der ligger ud over, hvad man kan forvente af selv de dygtigste elever i grundskolens ældste klasser.